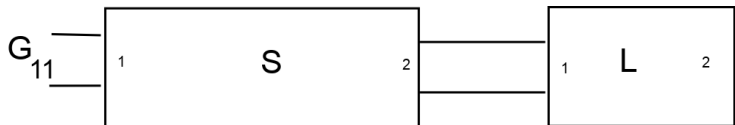


ANR COCORAM

F. Seyfert M.Olivi L.Baratchart

INRIA, Sophia-Antipolis, France

Les équations d'adaptation

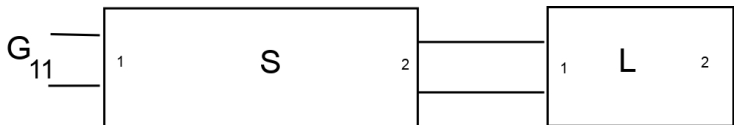


$$G_{1,1} = (S_{1,1}S_{2,2} - S_{1,2}S_{2,1}) \left(\frac{S_{2,2}^* - L_{1,1}}{1 - S_{2,2}L_{1,1}} \right)$$

- Conditions d'adaptation ponctuelles:

$$S_{2,2}(w_k) = \overline{L_{1,1}(w_k)}$$

Les équations d'adaptation



$$G_{1,1} = (S_{1,1}S_{2,2} - S_{1,2}S_{2,1}) \left(\frac{S_{2,2}^* - L_{1,1}}{1 - S_{2,2}L_{1,1}} \right)$$

- Conditions d'adaptation ponctuelles:

$$S_{2,2}(w_k) = \overline{L_{1,1}(w_k)}$$

- Adaptation uniforme, minimisation distance hyperbolique

$$\left| \frac{S_{2,2} - L_{1,1}^*}{1 - S_{2,2}^* L_{1,1}^*} \right| = \delta(S_{2,2}, L_{1,1}^*) \leq K(w)$$

qui même en dimension infini admet une limite sur le gain $1 - K^2$ atteignable.

Synthèse de filtre: forme de Belevitch

Every rational, reciprocal inner 2×2 matrix (with value Id at infinity) can be written as:

$$S(s) = \frac{1}{q(s)} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2^* & (-1)^n p_1^* \end{bmatrix}$$

with,

- p_1 monic of degree n
- $p_2(s) = (-1)^{n+1} p_2^*$
- p_2 of degree $\leq n - 1$
- q monic stable defined by,

$$qq^* = p_1 p_1^* + p_2 p_2^*$$

Fonction de filtrage et minimisation associée

For $s = jw$,

$$\begin{aligned} |S_{1,1}|^2 &= \frac{|p_1|^2}{|q|^2} = \frac{|p_1|^2}{|p_1|^2 + |p_2|^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{|p_2|^2}{|p_1|^2}} \end{aligned}$$

Given I the pass-band J the stop-band. Under an imposed reflection level in the pass-band, find the filter with best rejecting level in the stop bands,

$$\max_{p_1, p_2} \left\| \frac{p_1}{p_2} \right\|_{I} \leq \epsilon \left(\min_J \left| \frac{p_1}{p_2} \right| \right)$$

- Zoltarev problem of the third kind
- Quasi convex in general, and convex when p_2 is fixed
- Allows guaranteed optimal filter function synthesis

Dans un contexte "adaptation"

Manipulation des formules hyperboliques:

$$|G_{1,1}|^2 = \frac{1}{1 + 1/|D|^2}$$

avec

$$|D|^2 = \frac{|\overline{L_{1,1}} - S_{1,1}|^2}{(1 - |S_{1,1}|^2)(1 - |L_{1,1}|^2)}$$

qui joue donc le rôle de fonction de filtrage généralisée.

Formulation interpolatoire du problème d'adaptation

- Soient (x_k, γ_k) N points et valeurs d'adaptation
- Soit n le polynôme de transmission (degré au plus $N - 1$)

\mathcal{P} : Trouver (p, q) deux polynômes unitaires de degré N tels que,

$$\begin{cases} \forall k \in \{1..N\} \quad \frac{p}{q}(x_k) = \gamma_k \\ qq^* - pp^* = nn^* \end{cases}$$

et q stable.

Formulation interpolatoire du problème d'adaptation

- Soient (x_k, γ_k) N points et valeurs d'adaptation
- Soit n le polynôme de transmission (degré au plus $N - 1$)

\mathcal{P} : Trouver (p, q) deux polynômes unitaires de degré N tels que,

$$\begin{cases} \forall k \in \{1..N\} \quad \frac{p}{q}(x_k) = \gamma_k \\ qq^* - pp^* = nn^* \end{cases}$$

et q stable.

- Synthèse de filtre, adapté en N points

L'étonnant paramètre α

- Le polynôme de transmission n est supposé fixe
- Ses zéros de transmission sont choisis comme des fréquences "coupent tout"

L'étonnant paramètre α

- Le polynôme de transmission n est supposé fixe
- Ses zéros de transmission sont choisis comme des fréquences "coupent tout"
- Mais qu'en est il de son coefficient dominant α ?

$$|G_{1,1}|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2/|D_{norm}|^2}$$

L'étonnant paramètre α

- Le polynôme de transmission n est supposé fixe
- Ses zéros de transmission sont choisis comme des fréquences "coupent tout"
- Mais qu'en est il de son coefficient dominant α ?

$$|G_{1,1}|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2/|D_{norm}|^2}$$

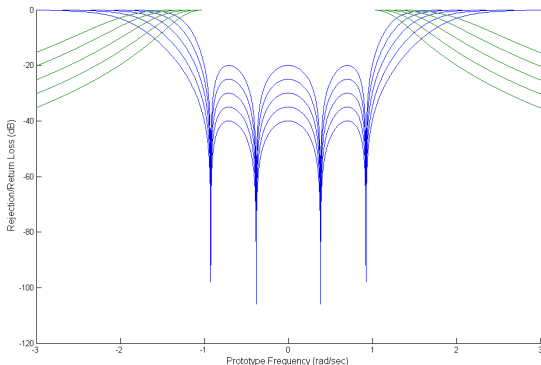
- En synthèse classique: α sert à ajuster le TOS au détriment de sélectivité.

Fonction de filtrage: synthèse classique

$$\begin{aligned} |G_{1,1}|^2 &= \left| \frac{p}{q} \right|^2 \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2 / |D_{norm}|^2} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2 \left| \frac{n_{norm}}{p} \right|^2} \end{aligned}$$

- p est un polynôme de Chebychev
- La fraction n/p equi-ondule sur la bande passante du filtre
- α ajuste le niveau d'equi-ondulation de D et donc le niveau du TOS
- Le dénominateur q , calculé par factorisation spectrale à partir de αn_{norm} et p n'influe pas sur $|G_{1,1}|^2$

Compromis TOS/sélectivité



- A la limite $\alpha \rightarrow \infty$ on obtient un filtre passe-tout
- Chute totale du degré

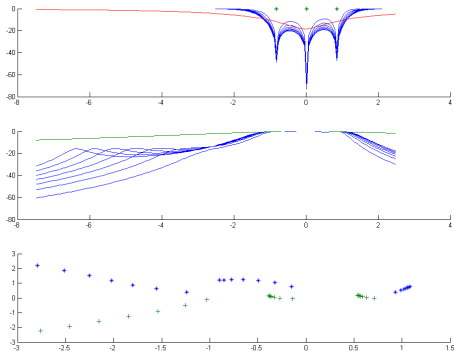
Le cas synthèse sur charge variable

$$\alpha^2/D^2 = \alpha^2 \frac{|n_{norm}|^2(1 - |L_{1,1}|^2)}{|\overline{p - L_{1,1}q}|^2}$$

Mais ici (p, q) dépendent de α par le truchement du problème interpolatoire:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1..N\} \frac{p}{q}(x_k) = \gamma_k \\ qq^* - pp^* = \alpha^2 n_{norm} n_{norm}^* \end{cases}$$

Antenne fournie par Faycel - adaptation sur une bande



- Lorsque α augmente on améliore l'adaptation jusqu'à une limite
- Une paire de racine et de pôle tend vers ∞
- Chute de degré ?

A la limite $\alpha = \infty$

On montre que

- $p_\alpha/\alpha \rightarrow p_\infty$ et $q_\alpha/\alpha \rightarrow q_\infty$
- (p_∞, q_∞) de degré au plus $N - 1$ mais plus nécessairement unitaires
- Ils satisfont le système interpolatoire:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1..N\} \frac{p_\infty}{q_\infty}(x_k) = \gamma_k \\ q_\infty q_\infty^* - p_\infty p_\infty^* = n_{norm} n_{norm}^* \end{cases}$$

A la limite $\alpha = \infty$

On montre que

- $p_\alpha/\alpha \rightarrow p_\infty$ et $q_\alpha/\alpha \rightarrow q_\infty$
- (p_∞, q_∞) de degré au plus $N - 1$ mais plus nécessairement unitaires
- Ils satisfont le système interpolatoire:

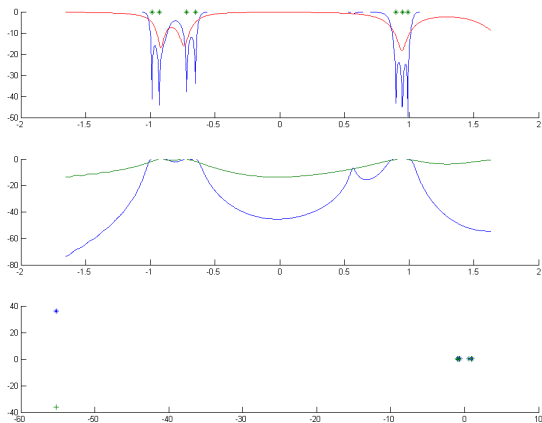
$$\begin{cases} \forall k \in \{1..N\} \quad \frac{p_\infty}{q_\infty}(x_k) = \gamma_k \\ q_\infty q_\infty^* - p_\infty p_\infty^* = n_{norm} n_{norm}^* \end{cases}$$

- Si après simplification poles/zeros il reste un zéro à l'infini alors

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} p/q = e^{i\theta}$$

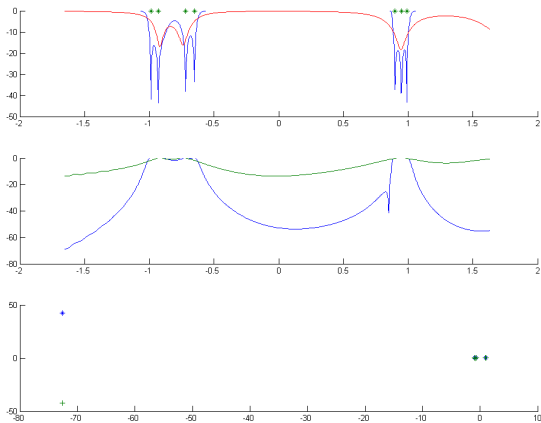
- En bande relativement étroite: réalisable avec un guide

Premiers essais sur l'ensemble des trois bandes



- 7 pôles - perte d'un degré: 6 pôles

Premiers essais sur l'ensemble des trois bandes



- 6 pôles
- 1 zéros de transmission

Perspectives

- Algorithmique (continuation différentielle) et programmation pour le nouveau problème interpolatoire
- Obtention de bornes H^∞
- Étude du problème en fréquences réelles (par opposition au modèle bande étroite)